

Tentamen Lineaire Algebra 1, 30 januari 2009

Het tentamen bestaat uit 6 vraagstukken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. U moet de antwoorden beargumenteren. De puntenwaardering kunt u vinden aan het einde van de vraagstukken.

1. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Bepaal de rang van A .
- Bepaal de dimensie van de nulruimte $N(A)$ van A .
- Bepaal de oplossingsverzameling van het homogene stelsel $Ax = 0$.
- Laat de vector b gegeven zijn door

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de oplossingsverzameling van het stelsel $Ax = b$.

2. Stel dat A een $n \times n$ matrix is.

- Leg uit wat we bedoelen met de uitspraak dat A niet-singulier is, en leg uit wat we verstaan onder de inverse A^{-1} van A .
- Stel A niet-singulier. Stel dat A^{-1} de inverse is van A . Stel B een $n \times n$ matrix. Toon aan: als $AB = I$ dan geldt $B = A^{-1}$.
- Stel $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Toon aan: als A niet-singulier is dan is aA niet-singulier en $(aA)^{-1} = \frac{1}{a}A^{-1}$.
- Toon aan: als A niet-singulier is dan heeft het stelsel vergelijkingen $Ax = 0$ alleen $x = 0$ als oplossing.

3. Definieer de lineaire afbeelding L van \mathbb{R}^2 naar \mathbb{R}^3 door

$$L\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}.$$

- a. Bepaal de matrix van L ten opzichte van de standaard-bases in \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 .
 - b. Bepaal de kern $\ker(L)$ van L .
 - c. Bepaal een basis van de range $L(\mathbb{R}^2)$ van L .
4. Laat $\mathbb{R}^{n \times n}$ de vectorruimte zijn van alle $n \times n$ matrices met reële coëfficiënten. Voor een gegeven matrix $A = (a_{ij})$ definiëren we het *spoor* van A door $\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$. Laat N de deelverzameling zijn van $\mathbb{R}^{n \times n}$ van alle matrices A zodat $\text{tr}(A) = 0$.

a. Toon aan dat N een deelruimte is van $\mathbb{R}^{n \times n}$.

In de rest van deze opgave, neem aan dat $n = 2$.

b. Bepaal een basis E van N . Wat is de dimensie van N ?

c. Bepaal een basis F van $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ zodat $E \subset F$.

5. Stel \mathcal{V} een vectorruimte, en stel (x, y) een inproduct op \mathcal{V} .

- a. Schrijf de (vier) eigenschappen op waaraan een functie $(x, y) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ moet voldoen opdat het een inproduct op \mathcal{V} is.
- b. Stel dat \mathcal{W} een deelruimte is van \mathcal{V} . We definiëren het *orthogonale complement* \mathcal{W}^\perp van \mathcal{W} door:

$$\mathcal{W}^\perp := \{x \in \mathcal{V} \mid (x, y) = 0 \text{ voor alle } y \in \mathcal{W}\}.$$

Bewijs dat \mathcal{W}^\perp een deelruimte is van \mathcal{V} .

c. Bewijs dat $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{0\}$.

6. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Bepaal het karakteristieke polynoom van A .
- Bepaal de eigenwaarden van A .
- Bepaal de eigenvectoren van A .
- Ga na of A diagonaliseerbaar is.

Puntenwaardering:

- Vraagstuk 1: 15
Vraagstuk 2: 15
Vraagstuk 3: 15
Vraagstuk 4: 15
Vraagstuk 5: 15
Vraagstuk 6: 15